

中图法分类号: TP391.41 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2011)08-1541-11

论文索引信息: 熊贇晖, 李桂清, 韩国强. 带 $\sqrt{2}$ 细分结构的四边形化[J]. 中国图象图形学报, 2011, 16(8): 1541-1551

带 $\sqrt{2}$ 细分结构的四边形化

熊贇晖^{1),2)}, 李桂清¹⁾, 韩国强¹⁾

¹⁾(华南理工大学计算机与科学工程学院, 广州 510640) ²⁾(华南理工大学理学院, 广州 510640)

摘要: 在 Morse 函数理论的基础上, 提出一种新的从三角网格中建立四边形网格多分辨率表示的方法. 先由人工指定或从拉普拉斯矩阵的特征函数中提取临界点, 计算带约束的拉普拉斯方程得到光滑的 Morse 函数. 函数的临界点(极大、极小和鞍点)有规律地分布在模型表面, 在三角网格表面梯度场的引导下, 生成临界点间流线, 得到临界点间的拓扑关系. 通过临界点交换规则, 同样是采用流线的方法, 得到更精细的四边形网格. 最终可实现无需参数化而仅用流线方法来建立不同多分辨率表示的四边形网格。

关键词: 四边形重新网格化; 多分辨率表示; Morse 理论; 拉普拉斯场

Quadriangulation with $\sqrt{2}$ -subdivision structure

Xiong Yunhui^{1),2)}, Li Guiqing¹⁾, Han Guoqiang¹⁾

¹⁾(School of Computer Science & Engineering, South China Univ. of Tech., Guangzhou 510640 China)

²⁾(School of Science, South China Univ. of Tech., Guangzhou 510640 China)

Abstract: Based on the Morse theory, a novel approach to create quad-mesh multiresolution from triangular mesh models is proposed. A smooth Morse function on a given triangular mesh is firstly defined as the solution of a Laplacian equation with constraints in which critical points are either specified by user or exacted from an eigenfunction of the Laplacian matrix of the mesh. As critical point layout has been carefully treated, maximum, minimum and saddle points of the function will automatically possess of structure of a quad mesh whose connectivity is then produced by tracing the stream lines of the function guided under the gradient field of the function. A critical point exchange rule is employed to generate the structure of the next finer quad mesh whose connectivity is finally also generated through stream line tracing. Parameterization is not required in the process as all resolution levels are created using the stream lines method.

Keywords: quad-remeshing; multiresolution; Morse theory; Laplacian field

0 引言

由于 3D 扫描设备的出现, 大量的 3D 模型数据被生成. 虽然模型数据获取便捷, 但从 3 维激光扫描仪或其他硬件设备获得的数据中通常含有多余的顶

点、边、面、不规则的多边形和噪声, 得到的原始数据冗余、结构性不好, 这些都会对几何模型的后续处理带来困难, 严重时会导致数值求解不稳定, 影响对模型的正确分析和处理^[1]. 对三角网格重新网格化是早期数字几何处理的重要内容, 积累了大量算法^[2-7]。

收稿日期: 2010-07-09; 修回日期: 2010-09-30

基金项目: 国家自然科学基金项目(60973084); 国家支撑计划项目(X2JS-B1080010); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2009zz0016); 华南理工大学自然科学基金青年基金项目。

第一作者简介: 熊贇晖(1972—), 男, 讲师. 华南理工大学计算机科学与工程学院计算机应用技术博士研究生, 研究方向为 CAGD、DGP. E-mail: yhxiong@scut.edu.cn.

另一方面 CAD 中常用的张量积 B 样条曲面和 NURBS 曲面是定义在四边形域上, 常见的建模软件 Maya, Modo 等也都支持以四边形网格为基础的建模, 四边形本身具有各向异性的特点使得四边形网格更容易与模型特征对齐. 因此, 四边形占优重网格化 (quad-dominant remeshing) 在 CAD 建模、快速原型 (rapid prototyping) 和动画软件中具有重要应用. 除此之外, 四边形重新网格化在流体模拟、网格编辑、曲面重构、逆向工程、纹理贴图、模型压缩和拼花图案装饰^[8] 等领域也有广泛应用, 尤其是在表达人造物体的模型时体现出优势. 在 Morse 理论的基础上, 提出一种带 $\sqrt{2}$ 细分结构的四边形多分辨率表示的算法.

四边形化早期的大多在 2D 平面上进行, 参见 Blacker^[9] 和 Owen^[10] 的工作, 1998 年 Borouchaki 和 Frey^[11] 提出自适应填充三角形再将三角形合并成四边形平面区域区域四边形化方法. Shimada 等人^[12] 将中的球形区域换成正方形块安插到给定平面区域中, 得到三角剖分区域后再合并成四边形^[13].

目前 3D 表面上的四边形网格化工作大致可以分成如下几种:

1) 面元合并或分裂法 先构造出非四边形网格 (如三角网格) 的基础上再得到四边形网格. 如: Eck 和 Hoppe 1996 年在文献^[14] 中先构造出三角域基复形, 将网格四边形化转化成在这个三角基复形的对偶图上求解最大-最小匹配图的问题. 类似的, Boier-Martin 等 2004 在文献^[15] 中用聚类的方法得到相邻多边形, 再用 Catmull-Clark 分裂算子转化成四边形网格. 这种方法简单, 但最终的结果是含有大量的 4-3 混合网格模型, 四边形质量不高. 但 Lai^[16] 通过一系列的增量优化操作, 将三角形边与曲率场对齐, 删除不对齐的边, 即将两个三角形合并, 最后得到质量相对较好的 4-3 混合网格.

2) 参数化方法 Hormann 和 Greiner^[17] 用最小形变参数化技术将三角网格映射到平面区域, 在参数域上构造四边形网格, 最后把这个平面上的四边形网格映射回 3 维空间中得到半规则的纯四边形网格. Alliez 等人^[18] 也采用参数化方法作四边形网格化, 在参数域中使用的曲率张量场. Ray 等人^[19] 则提出一种新的参数化方法, 使得到的四边形网格在参数域上正交于给定的向量场, 所产生的四边形网格带 T 型区域. 另外, 也可以将参数化方法与简化

方法相结合得到四边形网格. 如 Marinov 和 Kobbelt^[20] 提出先简化得到模型特征^[21], 再对每块曲面片用保角参数化到平面上, 通过最小化扭曲能量得到四边形参数域, 再映射回 3 维空间中得到四边形网格. 这种方法将遇到参数化扭曲带来的问题和分割曲面片后拼接的问题.

3) 基于正交场方法 如 Marinov 和 Kobbelt 在文献^[22] 中去掉了文献^[18] 中参数化的过程, 利用曲率张量场直接在 3 维流形上进行四边形网格化; Dong 等人在文献^[23] 中用调和标量场, 而不是用文献^[18] 中的张量场, 由标量场得到梯度场, 再将梯度场旋转 90° 得到等参场, 直接在 3 维流形上用类似文献^[18] 中的方法得到两组正交的流线, 计算它们的交点和连接关系最后得到四边形网格. Bommes 等人^[24] 于 2009 年通过全局优化函数得到一对处处光滑的相交向量场, 并在特征对齐上取得比较好的效果. 这种方法比较复杂, 而且对于复杂模型, 流线的生成决定了四边形模型的生成质量.

4) 谱分析方法 借助 Morse 理论^[25]、Dong 等人^[26] 分析拉普拉斯矩阵的特征向量得到四边形网格, 同样是在 Morse 理论的基础上, Dong 等人 2006 年在文献^[27] 中得到表面上的标量场, 通过谱分解得到四边形网格. 2006 年 Tong 等人在文献^[28] 中用离散调和形式得到一对标量场, 从而得到一对正交的等值线, 最后生成纯四边形网格. 2008 年 Schall 等人在文献^[29] 用可控场来指导流线的生成, 在一定程度上改进了四边形网格的生成. 同年, Huang 等人^[30] 将谱分析与离散余弦变换的关系应用在特征函数的优化上, 改进了 Dong 的工作. 这种方法中函数场中噪声的存在需要复杂的优化过程, 特征对齐也难处理, 但最后大多能得到纯四边形网格.

1 网格上的 Morse 理论

Morse 理论在计算机图形学中已有广泛应用, 它是连接微分几何和代数拓扑的桥梁. 对于一个给定的 n 维光滑流形 M , 可以在流形上定义一个光滑函数 f . 当然, 并不是所有的光滑函数都称为 Morse 函数, 而是 f 需满足 $f: M \rightarrow \mathbf{R}$, 对 $\forall p(x) \in M$, 假设 p 点的局部坐标系 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 若 $\left. \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \right|_p = 0$, 则称 p 为临界点, 否则为正

则点。常见的临界点有:极大值,极小值和鞍点。若 p 点处的 Hessian 矩阵 $\mathbf{H} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Big|_{i,j=1}^n$ 是非奇异的,则成 p 点是 Morse 点,否则是退化的。只有所有的临界点都是 Morse 点,才称函数 f 是 Morse 函数。Hessian 矩阵的负特征值个数称为该 Morse 点的指数(index)。如果流形 M 是 2 维流形,则 Morse 点的指数就只有 3 种: $index = 0$ 是极小点, $index = 1$ 是鞍点, $index = 2$ 是极大点。 f 在 p 点处的形态可以用这个指数表示。

Morse 理论起源于 Milnor 的 1963 年的工作^[31]。稍后 Banchoff 用分段线性函数替代光滑函数 f 将 Morse 理论推广到三角网格上^[32], f 的值仅定义在三角网格的顶点上,网格上边和面上的函数值通过线性插值得到,故三角网格上的临界点只可能是三角网格顶点。而这个光滑的 Morse 函数通常是基于求解一个带约束的 Laplacian 方程得到,这些约束点可以是用户指定,也可以从其他途径计算得到。Edelsbrunner 等人^[33]将 Morse 理论在网格上的应用进一步深入,沿着梯度线将网格上的鞍点,极小值和极大值点相连,从而得到一个嵌入在网格 M 上的 Morse-Smale 复形。Ni 等人^[34]用这个理论来研究网格的拓扑结构,而 Dong^[26-27]和 Huang^[30]的工作都是建立在这个理论的基础上。

众所周知,封闭流形上的欧拉数计算公式为

$$\chi = v - e + f = 2 - 2g \quad (1)$$

此处的 v 表示网格上顶点个数, e 表示网格的边数, f 表示网格的面数, g 表示流形的亏格数。另外,这个欧拉数也可以用定义在模型表面函数场的临界点个数来表示,即

$$\chi = \min - \text{saddle} + \max \quad (2)$$

式中 \min 表示极小值点的个数, saddle 表示鞍点个数, \max 表示极大值点个数。从式(2)可以看出,一个亏格为 g 的封闭可定向的流形最少可以用 1 个极小值, 1 个极大值和 $2g$ 个鞍点构成。在后面会介绍如何利用式(2)构造四边形的多分辨率表示。

2 四边形多分辨率网格

在调整目标四边形网格的大小和形状方面,可供用户交互的手段和途径并不是很多,即使能建立四边形网格的多分辨率表示,也大多采用参数化的方式进行。在 Dong^[27]和 Huang^[30]工作的基础上,

利用 Morse 理论,设计一种临界点交换规则,从而建立一种带 $\sqrt{2}$ 细分结构的四边形多分辨率网格表示方法。

三角网格上重新四边形网格化的流程如下:

1) 计算带约束的拉普拉斯场,得到光滑的 Morse 函数。作为约束条件的极值点可以通过两种方式得到:

(1) 构造原始模型的拉普拉斯矩阵,求该矩阵的特征值和特征函数,按特征值从小到大排序,选择一个合适的特征函数,如文献[27,30]。

(2) 人工指定三角网格极大(小)值点的位置。

2) 通过函数场得到梯度场,生成鞍点到极值点间流线,得到它们之间的拓扑连接关系^[27];

3) 采用人工调整与局部优化相结合来调整临界点数量和位置来优化网格上的 Morse 函数;

4) 优化结束后,需再重复第 2) 步,获取临界点间的拓扑连接关系,重构生成四边形网格。

在上面流程过程中,用户可交互的步骤为第 1) 和第 3) 步。在第 1) 步中, Dong 和 Huang 的方法是对特征函数进行选择;第 3) 步中, Dong^[27]采用文献[33]中的方法将进行优化, Huang^[30]选取一个特征函数作为初始函数,求解一个带约束的优化函数来达到改变临界点的位置和数量,这些优化过程大多比较复杂且难以控制。采用手工调整和局部优化算法来调整临界点的位置和数量,手工调整的时候经验性的东西更多些;

5) 建立带 $\sqrt{2}$ 细分结构的多分辨率表示。

大多数四边形重新网格化算法到上面 4 步即可完成。在此基础上,通过巧妙的临界点交换规则,重新计算带约束的拉普拉斯方程,生成新的鞍点。得到带 $\sqrt{2}$ 细分结构的四边形多分辨率表示。

重复上面第 2) — 5) 步,直至达到用户需要为止。下面将逐步细化上述步骤。

2.1 三角网格上的 Morse 函数

设 2 维流形 M 上有 n 个顶点,以序号 $1, 2, \dots, n$ 进行标记。 f 是定义在 M 上的标量函数,称为 M 上的标量场。记 f 在 M 的第 i 个顶点上的函数值为 f_i ,可定义函数 f 在 M 上各顶点处的离散拉普拉斯算子 Δ 如下

$$\Delta f_i = \sum_{j \in N_i} w_{ij} (f_i - f_j) = \sum_{j \in N_i} \frac{1}{2} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (f_i - f_j) \quad (3)$$

式中 N_i 为顶点 i 的 1 邻域所有顶点的集合, w_{ij} 表示 i 的邻接顶点 j 的权重, 满足 $\sum_{j \in N_i} w_{ij} = 1$ 且 $w_{ij} \geq 0$, $\cot \alpha_{ij}, \cot \beta_{ij}$ 为边 ij 相邻三角形的两个对角的余切。如果 1 邻域三角形中包含有钝角三角形, 则式(3)中会出现负系数。因此, 式(3)只适用于 1 邻域中的所有 α_{ij} 和 β_{ij} 均为锐角的情况。对于存在钝角的情形, 需要按如下方式修改将式(3)中的 w_{ij} , 以保证 $w_{ij} \geq 0$:

$$w_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sum_{j \in N_i} k_{ij}} \quad k_{ij} = \frac{\cot(\alpha_{ij}/2) + \cot(\beta_{ij}/2)}{\|u_j - u_i\|} \quad (4)$$

记 $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$, 则 $\Delta f = [\Delta f_1, \Delta f_2, \dots, \Delta f_n]^T$, 可改写成矩阵形式:

$$\Delta f = -L f \quad \text{其中: } L_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -w_{ij} & j \in N_i \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

2.1.1 基于拉普拉斯矩阵特征向量的 Morse 函数

假设 f 是拉普拉斯矩阵的特征函数, 则有:

$$\Delta f = -L f = \lambda f \quad \text{其中: } L_{ij} = \begin{cases} \sum w_{ij} & i = j \\ -w_{ij} & j \in N_i \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (6)$$

式(6)中的矩阵 L 是对称的, 所得特征值 λ 是实数, 将某个特征值对应的特征函数赋值到网格模型顶点上, 即可得到初始的 Morse 函数。图 1 中轮胎模型的前 12 个特征函数对应的特征值是从小到大排列, 可以看出特征值小的对应模型低频信息, 特征值大的对应高频信息, 并不是所有特征函数都是很光滑的函数。若想增加临界点数量从而获得稠密的四边形网格, 需要在反映高频信息的特征函数中去寻找, 噪声的存在增加了人工选择的难度。从大量实验结果来看, Xu^[35] 的 Laplace 算子求到的特征向量函数比式(3)的要光滑些, 因此, 采用 Xu 在文献[35]中第 3 节所定义的新 Laplace 算子来求特征向量函数。

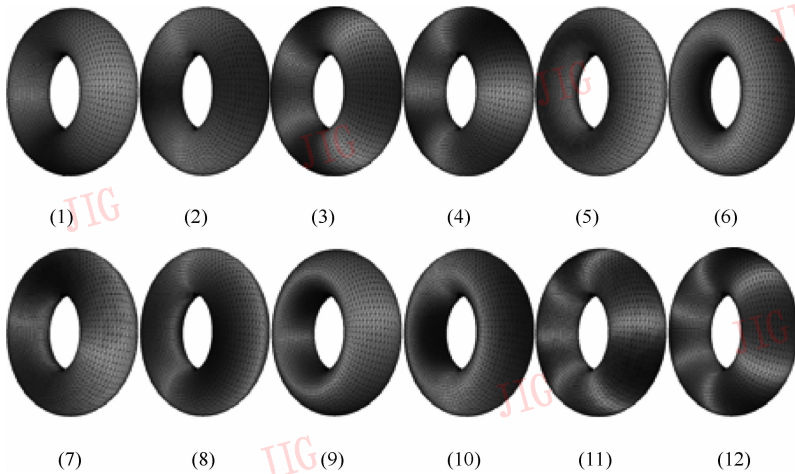


图 1 轮胎模型的前 12 个特征向量函数
Fig. 1 The first 12 eigenfunctions of torus model

2.1.2 求泊松方程的解作为 Morse 函数

假定通过交互方式指定三角网格 M 上某些顶点是极大值点和极小值点, 最好的分布方式是极大极小点要交替出现。其他顶点均满足 $\Delta f = 0$, 则可得带约束条件的拉普拉斯方程, 又叫泊松方程:

$$A f = B \quad (7)$$

$$\text{式中 } A_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ 且 } f_i \text{ 为极大(小)值} \\ 0 & i \neq j \text{ 且 } f_i \text{ 为极大(小)值} \\ L_{ij} & \text{其他} \end{cases}$$

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{极大值} \\ -1 & \text{极小值点} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

特征函数的优点在于函数临界点的分布具有较强的正交性(即极大极小点交错出现), 缺点是存在噪声影响临界点的获取。从图 2(d)可以看出这个函数场并不光滑, 而它却对应图 1 中第 11 个特征函数场的。但是, 泊松方程的解至少是二阶光滑, 如图 2(a)一(c)。故采用泊松方程得到光滑 Morse 函数。这样对后续生成 Morse-Smale complex^[27]会有帮助。

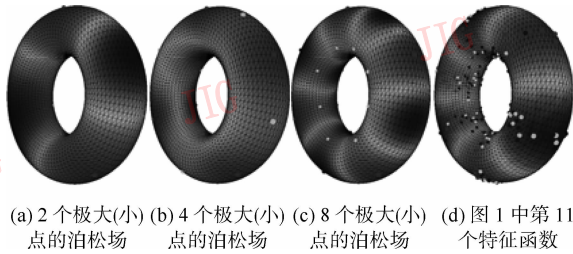


图 2 轮胎模型的泊松场
Fig. 2 The Poisson fields of torus

2.2 临界点间的拓扑连接关系

在定义了模型表面函数场后,采用文献[27, 36]中的方法,得到三角网格表面的梯度流。其过程如下:

- 1) 根据极大(小)值点的位置,用线性方程式(7)计算三角网格顶点的函数值,网格的边和面上的函数值由线性插值的方式得到。如图 3(a)所示。
- 2) 在网格表面三角形上计算梯度方向,得到整个网格模型的梯度场^[36],如图 3(a)所示。
- 3) 从鞍点出发,计算从鞍点到极大值点,鞍点到极小值点的梯度流。将鞍点和附近的极大(极小)值相连,获得临界点间的拓扑连接关系,如图 3(b)所示。

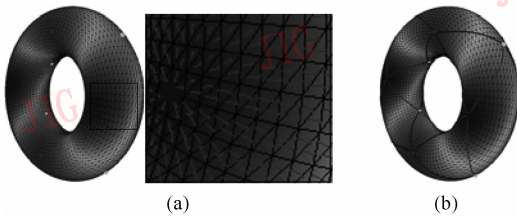


图 3 获取临界点间的拓扑连接关系
Fig. 3 The topology between critical points

2.3 优化 Morse 函数

1) 优化的方式 人工调整与局部优化相结合。
人工调整 由于原始三角网格模型的顶点数量可能会非常大,即使是改变少量的临界点,泊松方程式(7)的矩阵 **A** 和 **B** 都要做相应修改,从而重新求解线性方程式(7),计算量比较大,若用文献[37]中的动态超节点算法,则可达到实时效果,例如,文献[38]中的实时编辑就采用文献[37]的方法。

对极大(小)值点定义 3 种操作,如图 4 所示:增加,删除,移动。其中移动可以通过删除和增加两种操作合并完成。经过这 3 种操作得到

的函数仍满足式(2),故重新网格化后的结果仍保持是纯四边形网格。

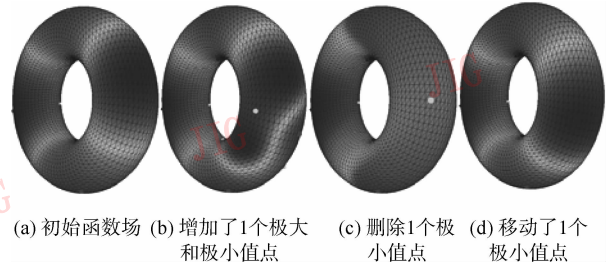


图 4 对极值点定义的 3 种操作
Fig. 4 The operators on the extremum

2) 局部优化临界点 临界点位置的局部优化,只优化极大(小)值点的位置,鞍点的位置是重新计算函数场后得出的。每次只优化一个极值点,从这个极值点的 1 邻域出发搜索最优的顶点。直至遍历网格上所有极值点。目标是使得最终生成的四边形网格的形状尽可能接近正方形。

假设当前被优化的极值点是 v , 从与 v 点相邻的边,角度和局部四边形区域来考虑,满足下列 3 个条件中的任意一个即可改变极值点位置。1) 减少与 v 相邻的鞍点和对角极值点间长度之差。2) 与 v 相邻鞍点间的角度更接近于 90° 。3) 减少了与 v 相邻的四边形覆盖的区域面积之差。因此,单个极值点的局部目标优化函数为

$$\min \left\{ \omega \sum_{j \in N_v} \left| vv_j - \frac{1}{N_v} \sum_{j \in N_v} vv_j \right|^2 + \alpha \sum_{j \in N_v} \left| vc_j - \frac{1}{N_v} \sum_{j \in N_v} vc_j \right|^2 + \beta \sum_{j \in N_v} \left| \angle v_{j-1} vv_j - \frac{\pi}{2} \right|^2 + \gamma \sum_{j \in N_v} \left| S_j - \frac{1}{N_v} \sum_{j \in N_v} S_j \right|^2 \right\} \quad (8)$$

式中: vv_j 表示 v 与第 j 个鞍点的直线距离; vc_j 表示第 j 个四边形中 v 与其对角顶点间的直线距离; N_v 表示相邻鞍点的个数; $\angle v_{j-1} vv_j$ 表示两相邻鞍点和 v 的夹角; S_j 表示与 v 相邻的空间四边形区域的面积; $\omega, \alpha, \beta, \gamma$: 分别表示这 4 类差值的权重。默认可都设为 1。

2.4 四边形网格重构

在确定了临界点位置,计算线性方程式(7)并得到相应的 Morse 函数场(图 5(a)),通过流线的方法获取临界点间的拓扑连接关系之后,就可以从这

些连接关系重构出四边形网格,而且是纯四边形网格。步骤如下:

1) 得到临界点间的拓扑关系之后(图 5(b)),对临界点间流线在模型表面的分布可以重新优化,我们采用的方法是生成类似于两点间的测地线(图 5(c)),具体方法参见文献[36]。

2) 将模型表面的四边形区域(图 5(e))参数化到平面上,在参数域上构造四边形域。对原始的三角网格模型进行重新采样,生成四边形网格(图 5(f)),具体方法见文献[27]。

当然,在从图 5(e)~(f)的过程中,采用的是分片参数化方法,固定矩形域的 4 个角点到正方形参数域的角点,按等长比例放置边界点到正方形参数域的边界上,参数化矩阵采用拉普拉斯矩阵,矩阵中的权重采用式(3)。调整参数域上的采样疏密程度,可以改变四边形网格生成的疏密,也就可以生成不同分辨率的四边形网格,由于在参数化过程中涉及到曲面间的拼接,也会产生一些明显的分界,如图 5(f)所示。一般的四边形重新网格化算法到此为止了。

实际上,在 2.5 节从顶点数很少的粗网格(图 5(d))出发,经过多次临界点交换,得到带 $\sqrt{2}$ 细分结构的不同分辨率的四边形网格。

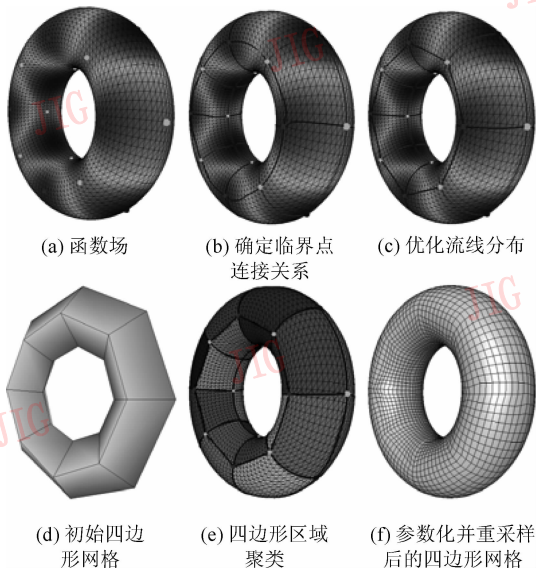


图 5 四边形网格的重构

Fig. 5 The quad-remeshing of model

2.5 建立带 $\sqrt{2}$ 细分结构的多分辨率表示

基于三角网格的多分辨率算法可以参见文献[39-43],而四边形网格的多分辨率算法则不常见。提出一种快速建立四边形多分辨率的算法,该算法

的特点是:可以从少量的临界点出发,相邻两级分辨率之间以 $\sqrt{2}$ 细分结构的方式增加网格四边形数量和顶点数量。而常见的参数化方法的相邻分辨率间的四边形面元个数则相差 4 倍,因此,能产生比参数化方法更多中间状态的分辨率形式,更细致地满足用户需求,特别是在后续的应用中(如多分辨率编辑),能给用户提供更多的自由度。

假设网格的亏格为 0,有 4 个极大点,4 个极小点,则必然有 6 个鞍点,如图 6(a)①所示。图 6 中第 1 行表示生成不同分辨率的函数场,第 2 行表示 Morse-Smale 复形,即重构的四边形网格,第 3 行表示伪对偶复形(quasi-dual complexes)^[27]。由式(1)(2)可知 $2 - 2g = \min - \text{saddle} + \max$,如果网格模型的亏格保持不变,改变极大(小)值的个数,鞍点个数也要做相应的改变。因此,可以通过下面的规则来建立带 $\sqrt{2}$ 细分模式的多分辨率表示:

1) 当前函数场的极小值 + 极大值 \rightarrow 新函数场的极大值;

2) 当前函数场的鞍点 \rightarrow 新函数场的极小值;

3) 计算线性方程式(7)获得新函数场的鞍点。

例如,将图 6(a)①中的 4 个极小值和 4 个极大值转换为图 6(b)①中的 8 个极大值,同时将图 6(a)①中的 6 个鞍点转换成图 6(b)①中的 6 个极小值,重新计算泊松场,根据式(2),图 6(b)中即可新增 $4 + 4 + 6 - 2 = 12$ 个鞍点。这些临界点(8 个极大值,6 个极小值,12 个鞍点)可以重构成一个四边形网格模型图 6(b)②。由于与鞍点相邻的必定有 2 个极小点和 2 个极大点,以鞍点为中心,将周围的 4 个极值点生成一个四边形,这就是相应的伪对偶复形。图 6(a)②的伪对偶复形就是图 6(a)③。类似地,图 6(b)②的伪对偶复形就是图 6(b)③。再将图 6(b)①中的极大(小)值转换成图 6(c)①的极大值,将鞍点转换为极小值,重新计算泊松场。根据式(2),图 6(c)①中可新增 $8 + 6 + 12 - 2 = 24$ 个鞍点。这些临界点可重构成图 6(c)②,图 6(c)②的伪对偶复形就是图 6(c)③。同理,图 6(c)1 的 26 个极值(14 个极大值 + 12 个极小值)转换成图 6(d)①的极大值;图 6(c)①的 24 个鞍点转换成图 6(d)①的极小值;重新计算图 6(d)①的泊松场得到 $26 + 24 - 2 = 48$ 个鞍点。这 $26 + 24 + 48 = 98$ 个临界点即可重构成四边形网格图 6(d)②。

依此类推,图 6(e)①中就有 50 个极大点,48 个极小点,有 $50 + 48 - 2 = 96$ 个鞍点。按照上面

这种规则,我们即可建立了带 $\sqrt{2}$ 细分结构的四边形多分辨率表示。从理论上讲,只要三角网格足够细,无须参数化的方法,即可用这种简单的规则生成一系列不同分辨率的四边形网格模型。而且分辨率模型与伪对偶复形交替出现。虽然在式(6)拉普拉斯矩阵的特征函数系列中也蕴含着多分辨率的一些信息(见图 1),但是无论是低频,还是高频信息中都会存在一些噪声,尤其是原始三角网格质量不是很好的情况下,寻找合适的特征函数是比较困难的。但对于一些低频特征函数,它们的临界点分布均匀,个数少,相对容

易处理。因此,第 1 步临界点的选择,除了人工指定之外,还可以从这些低频特征函数中寻找,再结合上述多分辨率生成规则,可迅速生成新的带 $\sqrt{2}$ 细分结构的四边形网格。

3 实验结果

本文算法的实现基于 CGAL 图形库,计算机为 Intel 双核 1.86GHz,内存 2G,Windows XP 操作系统。下面是几个模型的重新四边形网格化过程并建立多分辨率表示。

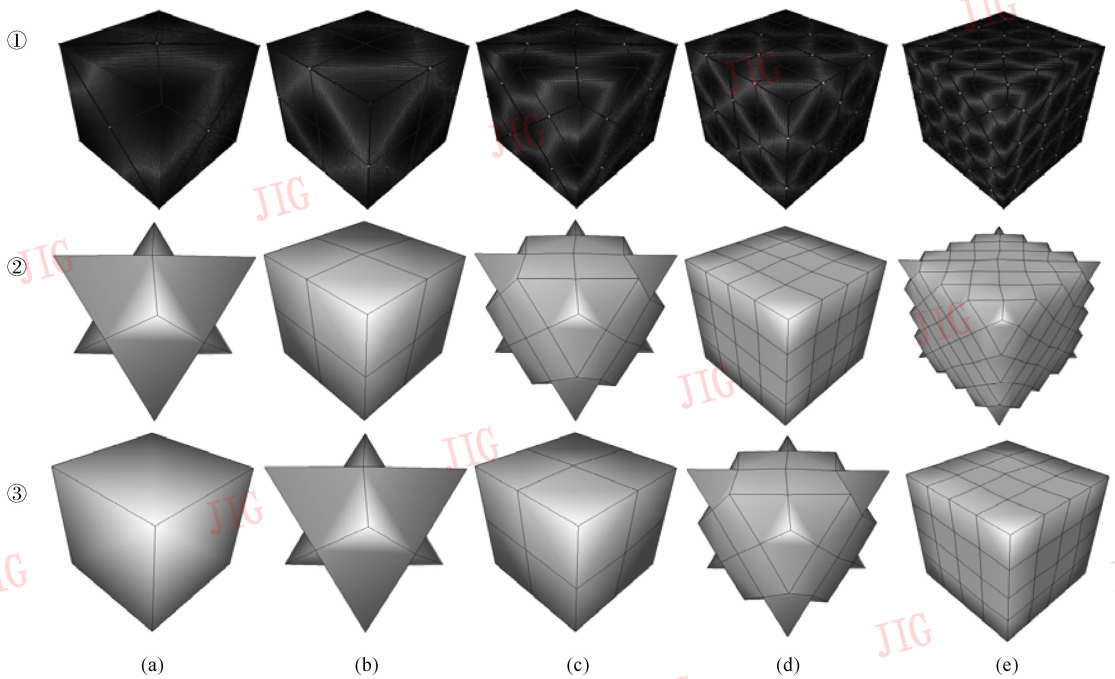


图 6 四边形网格的多分辨率表示

Fig. 6 The multiresolution representation of quad mesh

图 7 中的 8 字型三角网格模型,先在两端点位置任意设置一个极大,一个极小值,计算线性方程(7)得到(图 7(a))。根据 3.5 节中临界点交换规则,得到(图 7(b)),将图 7(b)中间的两个鞍点(见椭圆位置)设置成极大值则得到图 7(c),将模型两侧鞍点(图 7(d)椭圆位置)设置成极小值则得图 7e,再用 4.5 中的规则建立带 $\sqrt{2}$ 细分结构的四边形多分辨率表示。如图 7(f)(h)(j)和(l)的分辨率依次递增,而图 7(g)(i)(k)和(m)分别是它们对应的四边形表示。需要说明的是,因临界点只能在顶点处取得,故这种方法建立的多分辨率表示受限于原始三角

网格模型网格质量。

带 $\sqrt{2}$ 细分结构相邻分辨率的四边形网格,只是增加面点。如图 8(b)中四边形域中间区域的新采样点就是在图 8(a)的基础上增加的,采样点间新的连接关系就是图 8(c)。同理,图 8(d)中只增加了面上的采样点,图 8(e)就是采样点间新的连接关系。比较图 8(a)(e),将图 8(e)中的连接关系删除,只保留采样点,与图 8(a)叠加后形成图 8(f)。从图 8(f)可以看出,经过两次临界点交换的操作之后,类似于同时增加了面点和边点,而且边点的位置不一定在原有流线上,随着分辨率层数的增加,采样点的分布呈一种自适应的均匀分布。

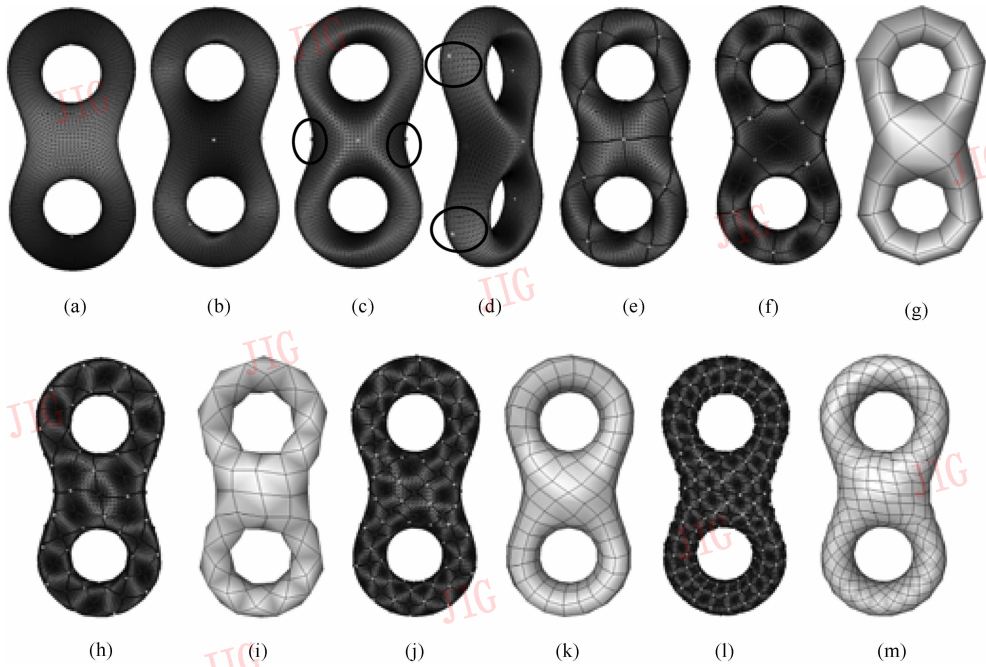


图7 8字模型的四边形化及多分辨率表示

Fig. 7 The quad-remeshing and multiresolution of the eight model

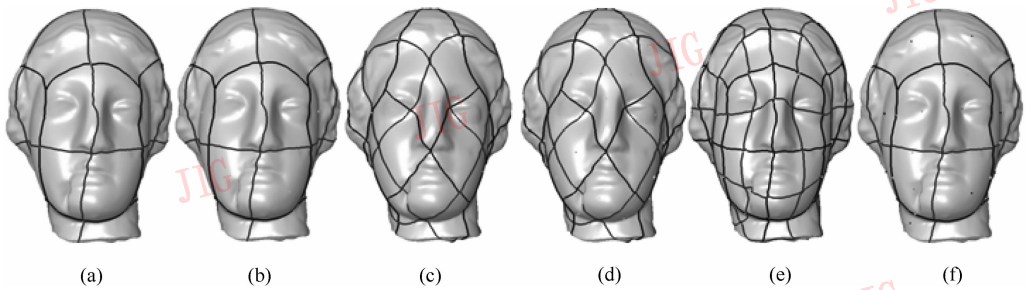


图8 自适应的采样点均匀分布

Fig. 8 An adaptive distributing evenly

当然,除了用人工的方法指定临界点之外,极值点也可以从拉普拉斯矩阵的特征向量函数中获取,图9(a)就是式(6)中计算得到的其中一个初始特征向量,拉普拉斯矩阵用文献[35]的方法获得,对初始特征向量场进行拉普拉斯平滑去掉一些噪声,并通过适当人工干预得到。图9(b)则是对应图9(a)的四边形网格。图9(c)(e)(g)(i)(k)则是依次运用临界点交换规则后得到的函数场,而图9(d)(f)(h)(j)(l)则是对应多分辨率表示的四边形网格。图9(m)—(p)是图9(k)和(l)在不同侧面的显示情况。

类似地,采用文献[35]的拉普拉斯算子,选择其中一个特征向量作为初始函数场,并对其进

行光滑去除噪声之后得到图10(a),图10(b)是对应图10(a)的四边形网格。图10(c)(e)(g)则是依次运用了多分辨率规则得到的函数场,而图10(d)(f)(h)则是对应多分辨率表示的四边形网格。

在整个算法过程中,计算时间还是可以接受的,下面仅以图10中 isis 模型为例进行简单说明,图10中 isis 模型有17 591个顶点数,35 178个面。从表1中可以看出,对于上万顶点个数的模型,求解线性方程式(7)获得泊松场的时间在几秒范围内,生成流线的过程随着临界点个数的增加,所费时间也随之增加。

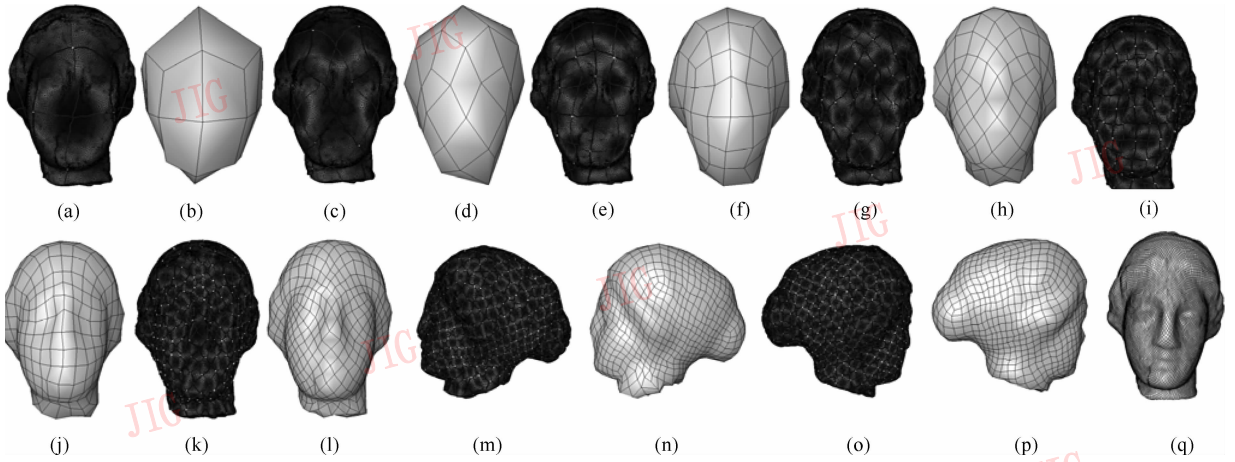


图 9 Venus-head 模型的四边形化及多分辨率表示

Fig. 9 The quad-remeshing and multiresolution of the venus-head model

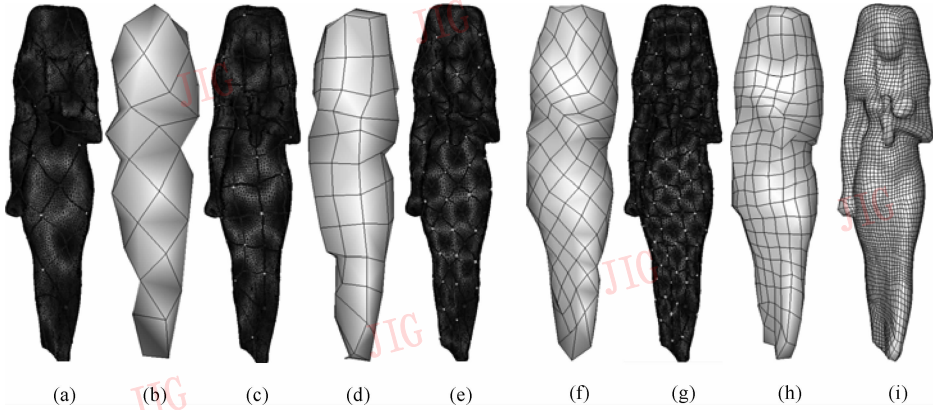


图 10 Isis 模型的四边形化及多分辨率表示

Fig. 10 The quad-remeshing and multiresolution of the Isis model

表 1 Isis 模型多分辨率模型构造所费时间

Tab. 1 The cost time of the Isis model

	/s		
图 10	计算泊松场时间	生成流线时间	构造四边形网格
(a)	1.578	0.062	0.031(图 10(b))
(c)	2.235	0.047	0.141(图 10(d))
(e)	2.469	0.047	0.547(图 10(f))
(g)	2.687	0.062	2.157(图 10(h))

本文方法可以很容易地嵌入到当前基于流线生成四边形网格的算法中^[27,30],通过上述方法,能够减少由于分片区域太大造成的参数化扭曲和拼接后分界明显的不利影响。如:图 9(q)是在图 9(k)的基础上分片参数化后的结果。图 10(i)是在图 10(g)的基础上分片参数化后的结果,由于经过多次临界点的交换,参数化的区域相对较小且均匀,因此,图 9(q)和图 10(i)中的曲面间的分界现象就没

有图 5(f)明显。

4 结 论

在 Morse 理论基础上,通过人工指定极值点,或通过求解拉普拉斯方程特征函数的方式获取极值点,将极值点作为边界条件,计算模型表面的泊松场,再用流线生成的方式获取临界点间的拓扑连接关系,重新网格化后得到四边形网格。在生成四边形网格的过程中,采用简单的临界点交换规则,使得临界点的分布呈现自适应均匀分布状态,无须采用参数化的方法即可建立带 $\sqrt{2}$ 细分结构的四边形多分辨率表示。由于相邻级别中增加的四边形面元数量比参数化方法生成的要少,故能够建立级别更丰富的多分辨率表示,为后续的网络处理提供更多的自由度。另外,这种带 $\sqrt{2}$ 细分结构的四边形重构算

法能够非常容易地嵌入到已有的四边形算法中。每交换一次临界点,都需重新求解线性方程式(7),计算量比较大,这部分计算效率可采用文献[37]中的动态超节点算法来提高。

本文算法仍存在需要改进的地方:1)临界点采样位置还需优化。由于临界点出现的位置落在顶点上,这样可能会造成一些鞍点未能出现,从而影响更高级别多分辨率表示的生成;2)多分辨率表示的实现过程中,相邻分辨率的细节没有保留;3)对模型特征捕捉不敏感。这些不足都将在后续的工作中进一步克服。

参考文献 (References)

- [1] Shewchuk J R. What is a good linear element? Interpolation, conditioning, and quality measures [C]// Proceedings of 11th International Meshing Roundtable. New York: Sandia National Laboratories, 2002: 115-126.
- [2] Turk G. Retiling polygonal surfaces [J]. Computer Graphics, 1992, 26(2): 55-64.
- [3] Peng Li, Li Guiqing, Xiong Yunhui, et al. A new multiresolution representation approach based on curvature [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2008, 20(6): 700-706. [彭莉,李桂清,熊赅晖,等.按曲率选取基点的多分辨率表示重构算法 [J].计算机辅助设计与图形学学报, 2008, 20(6):700-706.]
- [4] Alliez P, Ucelli G, Gotsman C, et al. Recent advances in remeshing of surfaces [J]. Shape Analysis and Structuring, 2008, 53-82.
- [5] Alliez P, Verdiere E C de, Devillers O, et al. Isotropic surface remeshing [C]// Proceedings of Shape Modeling International. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2003:49-58.
- [6] Xu G, Gortler S, Hoppe H. Geometry images [J]. ACM TOG, 2002, 21(3): 355-361.
- [7] Sander P, Wood Z, Gortler S, et al. Multi-chart geometry images [C]// Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing. New York, USA: ACM Press, 2003:146-155.
- [8] Lai Y K, Hu S M, Martin R R. Surface mosaics [J]. The Visual Computer: International Journal of Computer Graphics, 2006, 22(9-10): 604-611.
- [9] Blacker T, Stephenson M. Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation [J]. Numerical Methods in Engineering, 1991, 32: 811-847.
- [10] Owen S J, Staten M L, Canann S A, et al. Advancing front quadrilateral meshing using triangle transformations [C]// Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable. Dearborn, MI: Sandia National Labs, 1998: 409-428.
- [11] Borouchaki H, Frey P J. Adaptive triangular-quadrilateral mesh generation [J]. Numerical Methods in Engineering, 1998, 41: 915-934.
- [12] Shimada K, Gossard D. Bubble mesh: automated triangular meshing of non-manifold geometry by sphere packing [C]// Proceedings of the Third ACM Symposium on Solid Modeling and Applications. New York, USA: ACM Press, 1995: 409-419.
- [13] Shimada K, Liao J H, Itoh T. Quadrilateral meshing with directionality control through the packing square cells [C]// Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable. Dearborn, MI: Sandia National Labs, 1998:61-75.
- [14] Eck M, Hoppe H. Automatic reconstruction of B-spline surfaces of arbitrary topological type [C]// Proceedings of SIGGRAPH. New York, USA: ACM Press, 1996:325-334.
- [15] Boier-Martin I, Rushmeier H, Jin J. Parameterization of triangle meshes over quadrilateral domains [C]// Eurographics Symposium on Geometry Processing. New York, USA: ACM Press, 2004:197-208.
- [16] Lai Y K, Kobbelt L, Hu S M. An incremental approach to feature aligned quad dominant remeshing [C]// Symposium on Solid and Physical Modeling. Stony Brook, New York, USA: ACM, 2008: 137-145.
- [17] Hormann K, Greiner G. Quadrilateral remeshing [C]// Proceedings of Vision Modeling and Visualization, Infix. Saarbrücken, Germany: Aka, 2000:153-162.
- [18] Alliez P, Cohen-Steiner D, Devillers O, et al. Anisotropic polygonal remeshing [J]. ACM TOG, 2003, 22(3): 485-493.
- [19] Ray N, Li W C, Levy B, et al. Periodic global parameterization [J]. ACM TOG, 2005, 25(4):1460-1485.
- [20] Marinov M, Kobbelt L. A robust two-step procedure for quad-dominant remeshing [J]. Computer Graphics Forum, 2006, 25(3):537-546.
- [21] Cohen-Steiner D, Alliez P, Desbrun M. Variational shape approximation [J]. ACM TOG, 2004, 23(3): 905-914.
- [22] Marinov M, Kobbelt L. Direct anisotropic quad-dominant remeshing [C]// Proceedings of the 12th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2004:207-216.
- [23] Dong S, Kircher S, Garland M. Harmonic functions for quadrilateral remeshing of arbitrary manifolds [J]. Computer Aided Geometric Design, 2005, 22(5): 392-423.
- [24] Bommers D, Zimmer H, Kobbelt L. Mixed-integer quadrangulation [J]. ACM TOG, 2009, 28(3):77,1-10.
- [25] Edelsbrunner H, Harer J, Zomorodian A. Hierarchical Morse-Smale complexes for piecewise linear 2-manifolds [J]. Discrete and Computational Geometry, 2003, 30(1): 87-107.
- [26] Dong S, Bremer P T, Garland M, et al. Quadrangulating a Mesh Using Laplacian Eigenvectors [EB/OL]. [2010-09-28]. <http://mgarland.org/Papers/TR-2005-2583.pdf>.